

MATHÉMATIQUES

Grandeurs et mesures

Grandeurs et mesures au cycle 3

Activité : Périmètre et aire

Cette activité est plutôt destinée aux élèves de CM2 et de 6^e.

Objectifs

Distinguer périmètre et aire. Trouver des rectangles ayant le même périmètre qu'un rectangle donné et comparer leurs aires.

Il s'agit de plus de comprendre que l'aire et le périmètre sont des grandeurs qui n'évoluent pas toujours conjointement :

- doubler les longueurs d'un polygone, n'a pas pour effet de doubler l'aire de ce polygone ;
- un polygone peut avoir un périmètre plus grand qu'un autre polygone mais une aire plus petite que cet autre polygone.

Il convient de mobiliser la comparaison, la composition et la décomposition de figures pour permettre de mieux percevoir les aires.

Situation 1 (15 minutes)

Déroulement de l'activité

L'activité peut débuter par une présentation du contexte de la séance : il s'agit d'une séance de mathématiques portant sur les grandeurs et les mesures. Après la distribution de la figure donnée en annexe 1 (rectangle de 8 cm sur 6 cm) et l'énoncé des consignes, un temps de recherche individuel peut être accordé aux élèves.

CONSIGNE

- Observer et décrire brièvement la figure.
- Déterminer le périmètre de la figure A.

Commentaires

L'observation permet de faire émerger le vocabulaire spécifique et les éléments caractéristiques (rectangle, carreaux, longueur, largeur) ainsi que les propriétés utiles de la figure.

La question évite les termes « calculer » ou « mesurer » qui induisent une procédure.

Temps de recherche individuel

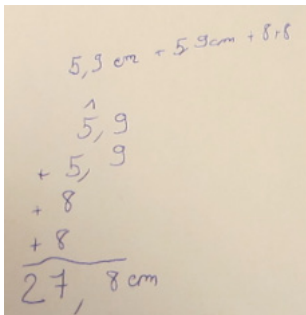
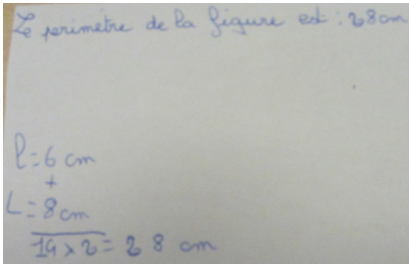
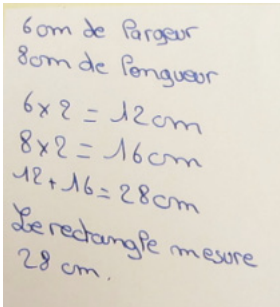
Le temps individuel permet aux élèves de s'approprier la situation. Il permet aussi de réaliser une évaluation diagnostique sur :

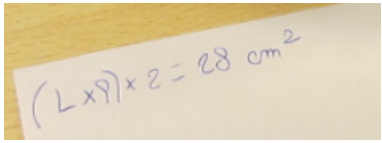
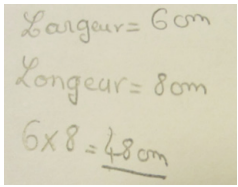
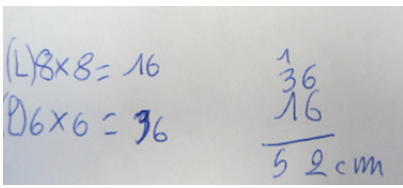
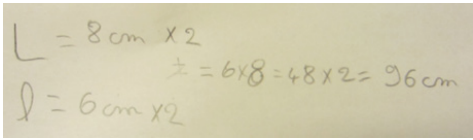
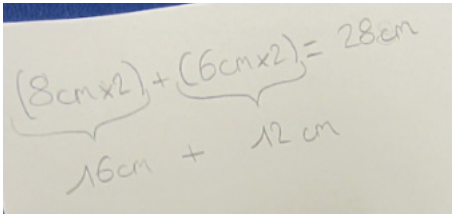
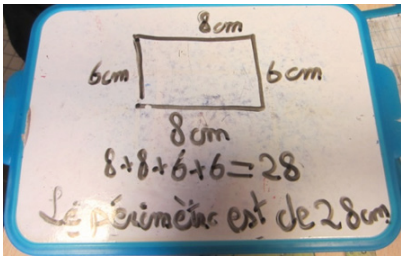
- la connaissance de ce qu'est le périmètre ;
- les procédures utilisées (mesure, comptage, calcul).

Les élèves rencontrant des difficultés peuvent être invités à repasser au feutre le contour du rectangle.

L'enseignant circule pour relever toutes les procédures significatives qu'il réutilisera lors de la phase de mise en commun.

Exemples de productions d'élèves

EXEMPLES DE PRODUCTIONS D'ÉLÈVES	ANALYSES ET COMMENTAIRES
	La procédure est correcte. La connaissance de ce qu'est un périmètre est sous-jacente (addition des largeurs et des longueurs). L'élève s'appuie sur la mesure avec des erreurs (5,9 cm au lieu de 6 cm). Vérifier avec l'élève la bonne utilisation de la règle.
	La procédure est correcte. La connaissance de ce qu'est un périmètre est sous-jacente (Longueur + largeur multipliés par deux). L'élève s'appuie sur la mesure. La formulation proposée est recevable et met en évidence la connaissance de la notion de périmètre.
	La procédure est correcte. La connaissance de ce qu'est un périmètre est sous-jacente (Longueur multipliée par deux + largeur multipliée par deux). L'élève s'appuie sur la mesure. La phrase ne fait explicitement référence au périmètre et reste ambiguë. Il convient de faire préciser à l'élève sa phrase de conclusion.

EXEMPLES DE PRODUCTIONS D'ÉLÈVES	ANALYSES ET COMMENTAIRES
	La valeur numérique du résultat est correcte. Erreur d'écriture de la formule ($L \times l$). Erreur d'unité (cm^2). <i>Le résultat laisse supposer que la procédure est correcte mais que l'utilisation de la formule n'est pas maîtrisée et entre une confusion avec celle de l'aire.</i>
	La valeur numérique du résultat est erronée. La formule est celle de l'aire. <i>Dans un premier temps, reprendre la notion de périmètre sans l'utilisation de la formule puis reconstruire les formules.</i>
	L'élève ajoute les deux longueurs bien qu'il ait écrit le signe multiplié, il multiplie les deux largeurs. Il est difficile de savoir ce qu'il pense en produisant cet écrit. <i>Faire verbaliser l'élève pour pouvoir comprendre ce qu'il a fait et pouvoir lui donner les conseils appropriés. Inviter à l'élève à s'appuyer sur ce qu'est un périmètre, plutôt que sur des formules.</i>
	L'élève mélange les deux formules en adoptant deux procédures différentes (plutôt celle du périmètre au départ puis celle de l'aire). <i>Faire verbaliser l'élève pour pouvoir comprendre ce qu'il a fait et pouvoir lui donner les conseils appropriés. Inviter à l'élève à s'appuyer sur ce qu'est un périmètre, plutôt que sur des formules.</i>
	Une procédure utilisant une formule.
	Une procédure correcte utilisant les représentations. La production de l'élève montre une bonne maîtrise de la notion de périmètre.

Mise en commun des diverses propositions des élèves

La notion de périmètre sera précisée en s'appuyant sur les réponses des élèves et l'analyse de leurs erreurs.

Commentaires

- Les productions d'élèves montrent une utilisation mal maîtrisée des formules dont la connaissance est approximative.
- Il convient de s'assurer que les notions soient suffisamment construites avant d'introduire des formules. Les procédures ne peuvent être construites indépendamment du sens. Il est plus facile pour un élève de calculer le tour de la figure en additionnant successivement les mesures qu'il rencontre.
- La mise en commun mettra l'accent la définition du périmètre, des procédures possibles pour le déterminer (mesurage, additions successives de la mesure des côtés...) avant de proposer des formules qui seront construites avec les élèves.

Trace écrite dans les cahiers

La trace écrite se construira par parties. La trace finale se trouve en annexe 3.

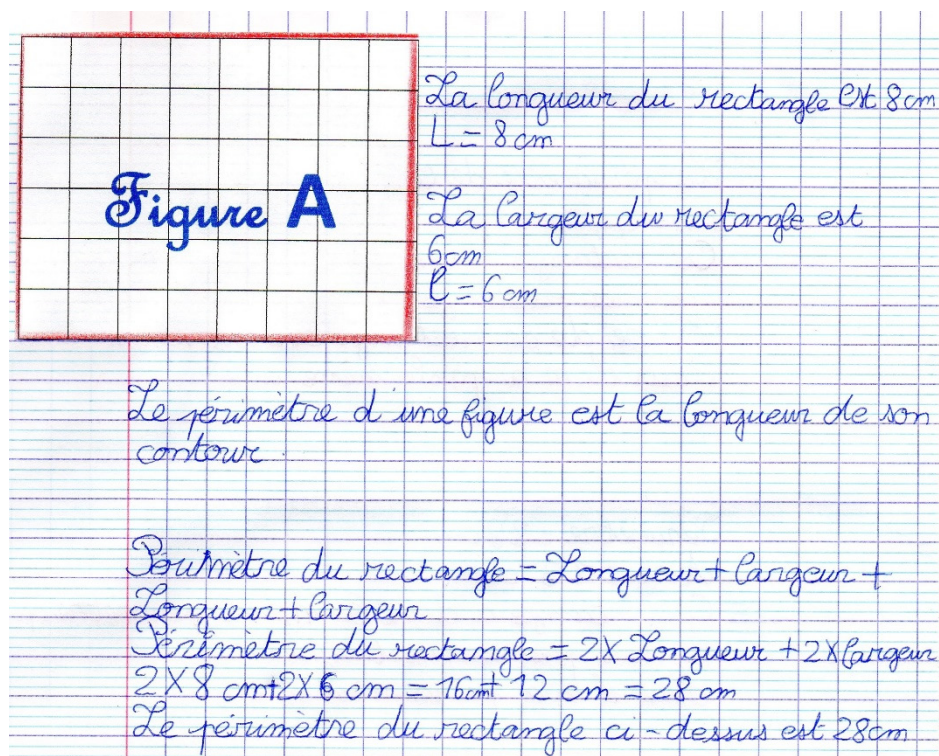


Figure A

La longueur du rectangle est 8 cm
 $L = 8 \text{ cm}$

La largeur du rectangle est 6 cm
 $l = 6 \text{ cm}$

Le périmètre d'une figure est la longueur de son contour

Périmètre du rectangle = Longueur + largeur +
 Longueur + largeur

Périmètre du rectangle = $2 \times \text{Longueur} + 2 \times \text{largeur}$
 $2 \times 8 \text{ cm} + 2 \times 6 \text{ cm} = 16 \text{ cm} + 12 \text{ cm} = 28 \text{ cm}$

Le périmètre du rectangle ci-dessus est 28 cm

Situation 2 (15 minutes)

Déroulement de l'activité

L'enjeu est de mettre en évidence ce que représente l'aire par rapport au périmètre.

CONSIGNE

Déterminer l'aire de la figure A.

Temps de recherche individuelle (éventuellement préalable à des travaux en sous-groupes)

Ce temps individuel permet d'apporter un étayage aux élèves qui tendaient à confondre aire et périmètre lors de la situation 1.

- Faire verbaliser les attentes et l'enjeu de la situation.
- Accompagner les procédures (verbalisation, explication).

Commentaires

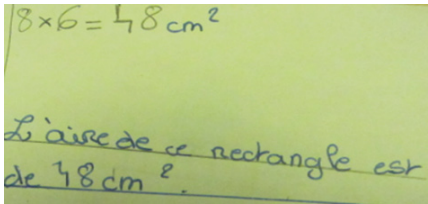
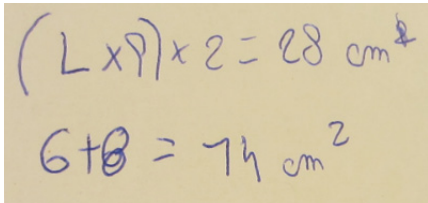
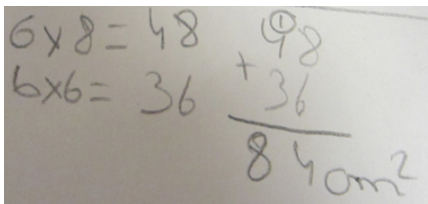
Les élèves peuvent être invités à colorier le rectangle. Cela peut aider ceux qui n'ont pas encore compris ce qu'est l'aire d'une figure.

Les élèves ayant fini très rapidement peuvent être invités à trouver une deuxième méthode pour déterminer cette aire :

- cela permet de s'assurer que ceux qui utilisent la formule ont bien compris ce qu'était l'aire d'une figure, en dénombrant les carreaux d' 1 cm^2 par exemple ;
- cela permet à ceux qui ont dénombré les carreaux de retrouver la formule pour calculer l'aire d'un rectangle.

L'enseignant circule pour relever toutes les procédures significatives.

Exemples de productions d'élèves

EXEMPLES DE PRODUCTIONS D'ÉLÈVES	ANALYSES ET COMMENTAIRES
	L'utilisation de la formule est correcte et bien maîtrisée.
	L'utilisation de la formule est mal maîtrisée et confondue en partie avec celle du périmètre.
	L'utilisation de la formule est mal maîtrisée et confondue avec celle du périmètre.

Mise en commun des diverses propositions des élèves

L'objectif est de clarifier ce qu'est l'aire et de lever les confusions qui sont faites avec le périmètre.

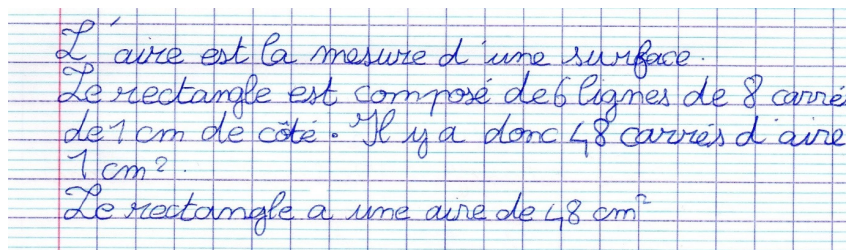
En cas de difficulté l'élève doit revenir au sens pour faire le lien avec les calculs :

- pour le périmètre : la longueur du contour repassé au feutre et donc la somme des longueurs de chacun des côtés ;
- pour l'aire : le nombre de carreaux de 1 cm^2 coloriés, le nombre de carreaux de chaque ligne et le nombre de lignes doit conduire à la multiplication pour déterminer le nombre de carreaux de 1 cm^2 .

L'unité (cm^2) est à pointer notamment par la multiplication des deux termes. La présence de l'unité dans le calcul peut être une aide pour cette prise de conscience du centimètre carré ($8 \text{ cm} \times 6 \text{ cm}$).

Trace écrite dans les cahiers

La trace écrite précédente est complétée.



Situation 3 (15 minutes)

Déroulement de l'activité

Mettre des bandes quadrillées à disposition des élèves (Annexe 2).

CONSIGNE

En utilisant le quadrillage des bandes de papiers, colorier des rectangles de dimensions différentes qui ont le même périmètre que la figure A. Déterminer l'aire de chacun des rectangles trouvés.

Temps de recherche individuelle (éventuellement préalable à des travaux en sous-groupes)

Les élèves réinvestissent la notion de périmètre.

Ce temps individuel permet d'apporter un étayage aux élèves qui ont rencontré des difficultés lors de la situation 1 et de s'assurer qu'ils savent maintenant déterminer le périmètre de rectangles :

- faire verbaliser les attentes et l'enjeu de la situation ;
- accompagner les procédures des élèves (verbalisation, explication) ;
- en cas de difficulté, on peut donner la mesure d'un côté.

Une validation des productions par le professeur (on peut imaginer un petit trait rouge sur chaque rectangle validé par l'enseignant qui circule dans les rangs) peut permettre de suivre l'avancée du travail de chacun et de valoriser les réussites.

Commentaires

L'enseignant circule pour relever toutes les procédures significatives. L'enseignant peut aussi prendre en charge un petit groupe d'élèves qu'il rassemble en fonction de besoins identifiés.

Les élèves les plus à l'aise et les plus rapides peuvent être invités à justifier, à l'écrit, qu'il n'existe pas d'autres rectangles que ceux qu'ils ont trouvés.

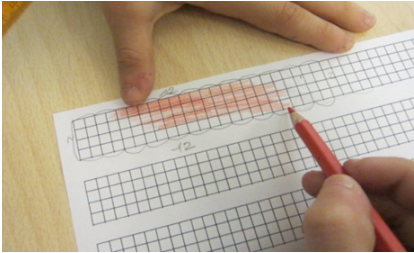
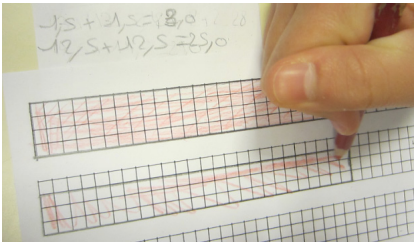
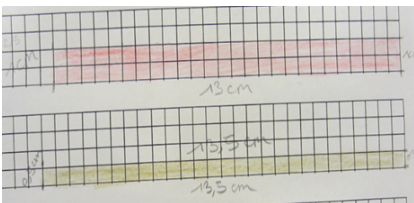
Mise en commun des diverses propositions des élèves

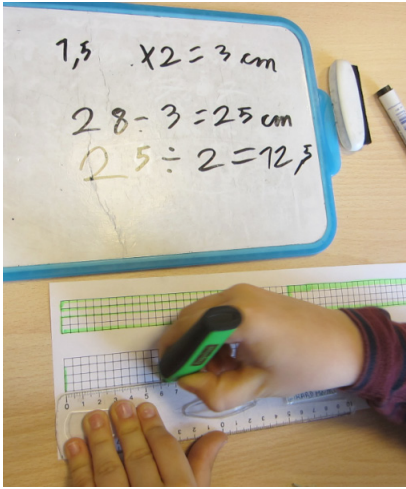
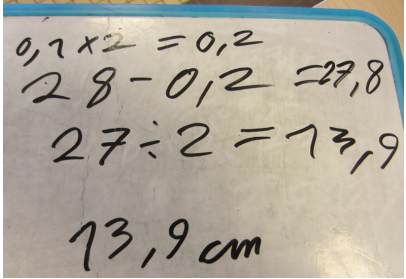
La mise en commun ne doit pas arriver trop tôt et ne peut remplacer le travail de suivi pendant le temps de recherche. Ce travail de suivi doit permettre de s'assurer que tous les élèves ont bien compris la question et qu'ils ont tous réussi à produire au moins un rectangle répondant à la question posée.

La mise en commun a pour but :

- de faire état des différentes propositions des élèves, puis les valider ou les rejeter, le travail sur l'oral, pour argumenter, est particulièrement important ici ;
- de mettre en lumière que les différents rectangles trouvés (y compris la figure A) ont tous le même périmètre mais pas la même aire.

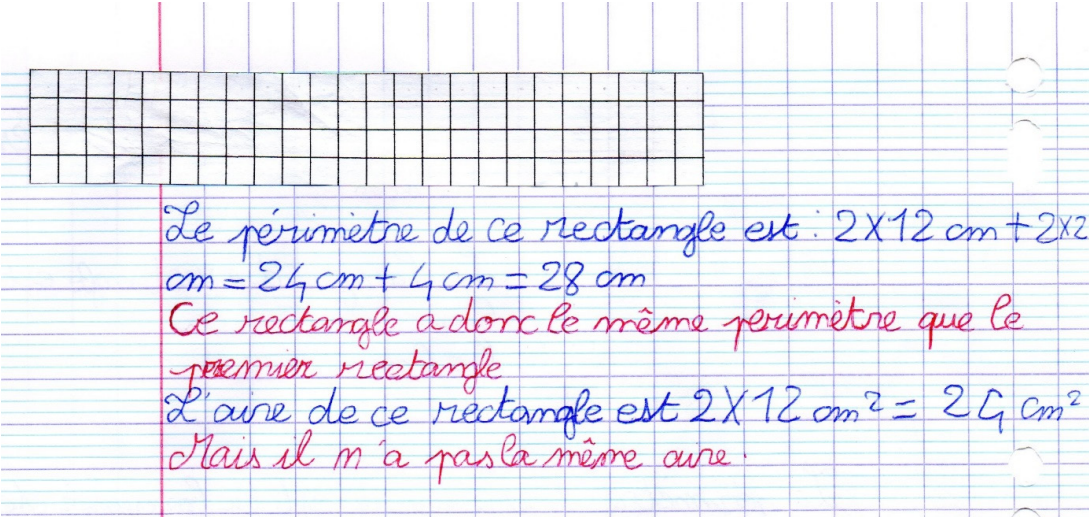
Remarque : Le fait de contraindre la nature de la forme à réaliser (un rectangle) et d'utiliser un quadrillage permet de limiter le nombre de réponses possibles et facilite la mise en commun.

EXEMPLES DE PRODUCTIONS D'ÉLÈVES	ANALYSES ET COMMENTAIRES
	La procédure est mixte (comptage des carreaux et recours à l'unité cm, 2 carreaux = 1 cm). La connaissance de la formule est sous-jacente (addition des largeurs et des longueurs).
	La procédure fait appel au calcul avec les mesures à partir de la connaissance de la valeur du périmètre. La connaissance de la formule est sous-jacente (addition des largeurs et des longueurs).
	La procédure fait appel au calcul avec les mesures à partir de la connaissance de la valeur du périmètre. La connaissance de la formule est sous-jacente (addition des largeurs et des longueurs).

EXEMPLES DE PRODUCTIONS D'ÉLÈVES	ANALYSES ET COMMENTAIRES
	La procédure fait appel au calcul avec les mesures à partir de la connaissance de la valeur du périmètre. Le choix de la largeur est fait (1,5 cm) puis celle-ci est multipliée par 2. Le résultat de la somme des 2 largeurs est retranché de la valeur totale du périmètre pour obtenir celle des 2 longueurs. Cette dernière est alors divisée pour obtenir la longueur. La connaissance de la formule est sous-jacente (multiplication des largeurs, division de la mesure restante par 2 pour obtenir les longueurs).
	L'élève cherche la plus petite largeur mesurable à la règle soit 0,1 cm puis la procédure est identique à celle-ci-dessus pour déterminer la plus grande longueur mesurable à la règle soit 13,9 cm.

Trace écrite dans les cahiers

La trace écrite précédente est complétée.

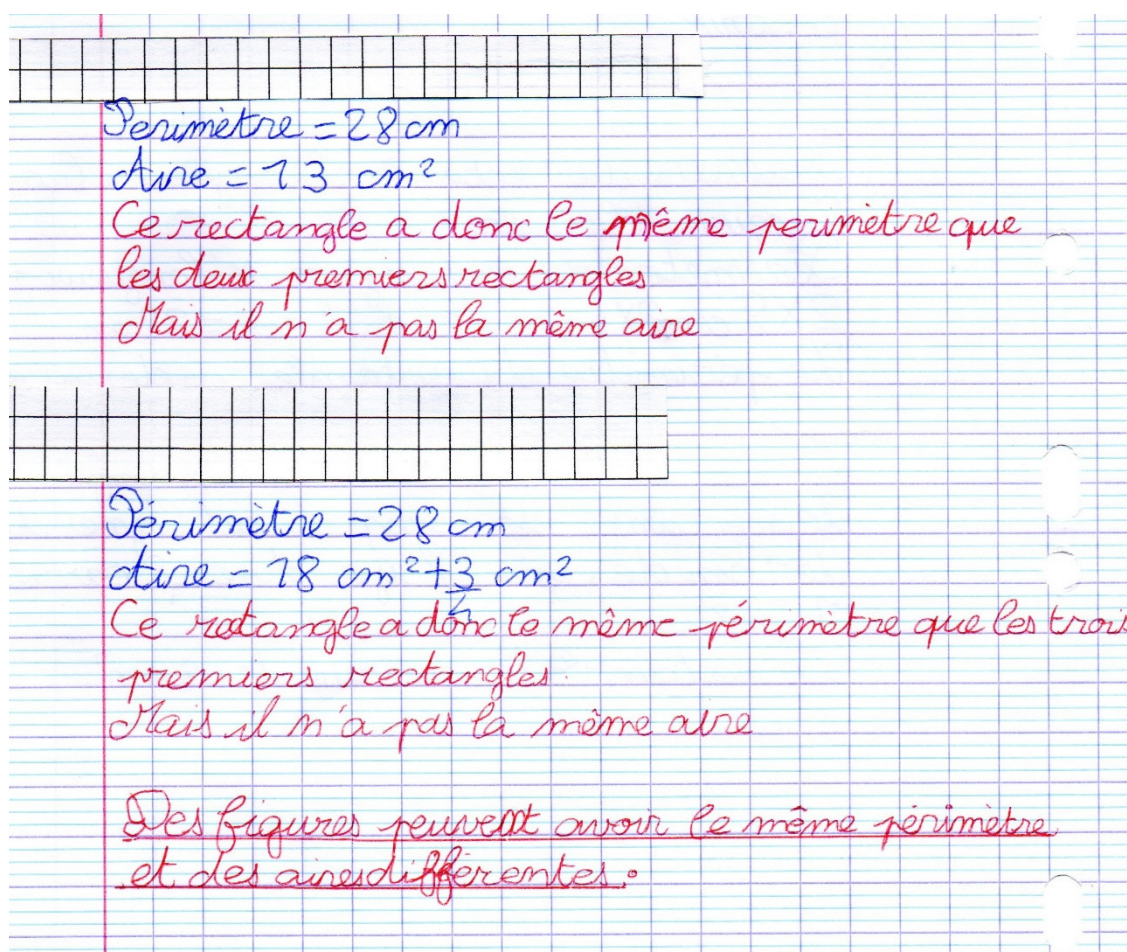


Le périmètre de ce rectangle est : $2 \times 12 \text{ cm} + 2 \times 2 \text{ cm} = 24 \text{ cm} + 4 \text{ cm} = 28 \text{ cm}$

Ce rectangle a donc le même périmètre que le premier rectangle

L'aire de ce rectangle est $2 \times 12 \text{ cm}^2 = 24 \text{ cm}^2$

Mais il n'a pas la même aire.



Perimètre = 28 cm
 Aire = 13 cm²
 Ce rectangle a donc le même périmètre que les deux premiers rectangles.
 Mais il n'a pas la même aire.

Perimètre = 28 cm
 Aire = 18 cm² + 3 cm²
 Ce rectangle a donc le même périmètre que les trois premiers rectangles.
 Mais il n'a pas la même aire.

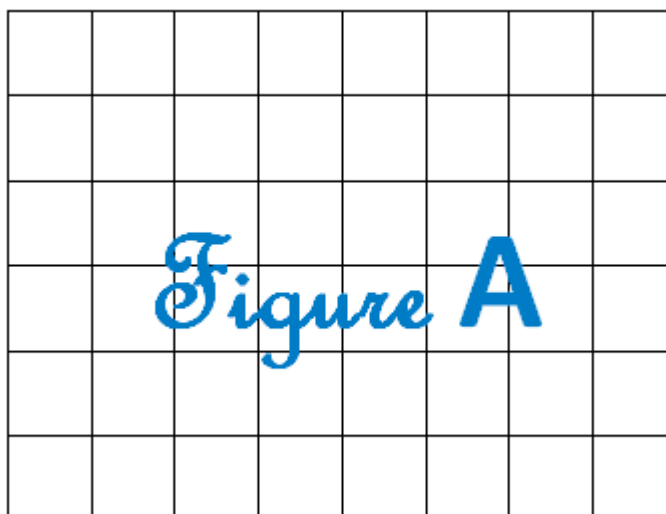
Des figures peuvent avoir le même périmètre et des aires différentes.

Prolongements possibles

Les questions suivantes peuvent être posées.

- « Peux-tu trouver deux rectangles qui ont la même aire, mais qui n'ont pas le même périmètre ? »
- « Peux-tu trouver deux rectangles qui n'ont pas le même pas le même périmètre et pas la même aire, mais tels que celui qui a le plus petit périmètre a la plus grande aire ? »

Annexe 1



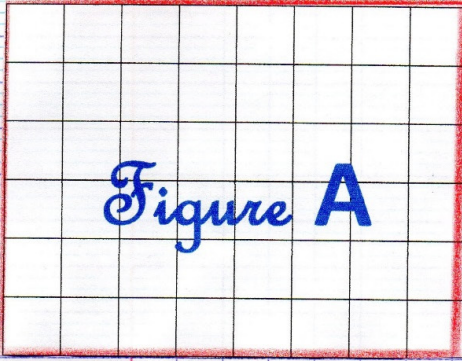
Les carreaux de la figure font 1 cm^2

Annexe 2

On donne une bande quadrillée avec des petits carreaux de $0,5\text{ cm} \times 0,5\text{ cm}$. La bande mesure 4 carreaux (2 cm) sur 56 carreaux (28 cm).

- Le choix de carreaux ne faisant pas 1 cm évite l'ambiguïté entre le carreau et le cm^2 .
- Les carreaux de 0,5 cm permettent des liens avec le cm dans le cadre du périmètre.
- Le choix de cette bande permet de limiter le nombre de solutions à gérer et d'éviter que les figures proposées ne soient trop complexes (ce qui permettra de calculer l'aire par la suite).

Annexe 3 : trace écrite finale (rédigée en étapes)



La longueur du rectangle est 8 cm
 $L = 8 \text{ cm}$

La largeur du rectangle est 6 cm
 $l = 6 \text{ cm}$

Le périmètre d'une figure est la longueur de son contour.

Périmètre du rectangle = Longueur + largeur + Longueur + largeur
 Périmètre du rectangle = $2 \times \text{Longueur} + 2 \times \text{largeur}$
 $2 \times 8 \text{ cm} + 2 \times 6 \text{ cm} = 16 \text{ cm} + 12 \text{ cm} = 28 \text{ cm}$
 Le périmètre du rectangle ci-dessus est 28 cm

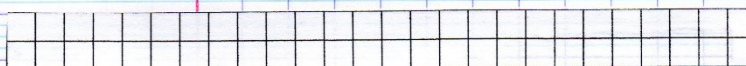
L'aire est la mesure d'une surface.
 Le rectangle est composé de 6 lignes de 8 carrés de 1 cm de côté. Il y a donc 48 carrés d'aire 1 cm².
 Le rectangle a une aire de 48 cm²



Le périmètre de ce rectangle est : $2 \times 12 \text{ cm} + 2 \times 2 \text{ cm} = 24 \text{ cm} + 4 \text{ cm} = 28 \text{ cm}$

Ce rectangle a donc le même périmètre que le premier rectangle

L'aire de ce rectangle est $2 \times 12 \text{ cm}^2 = 24 \text{ cm}^2$
Mais il n'a pas la même aire.

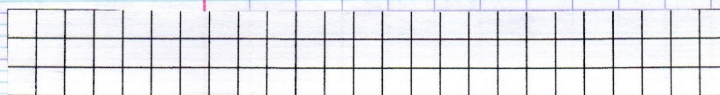


Périmètre = 28 cm

Aire = 13 cm^2

Ce rectangle a donc le même périmètre que les deux premiers rectangles

Mais il n'a pas la même aire



Périmètre = 28 cm

Aire = $18 \text{ cm}^2 + 3 \text{ cm}^2$

Ce rectangle a donc le même périmètre que les trois premiers rectangles.

Mais il n'a pas la même aire

Des figures peuvent avoir le même périmètre et des aires différentes.